TẠP CHÍ KHOA HỌC & CÔNG NGHỆ ĐẠI HỌC DUY TÂN
DTU Journal of Science and Technology 04(41) (2020) 94-96

TRƯỜNG ĐẠI HỌC DUY TÂN
DUYTAN UNIVERSITY

Về sự không tồn tại nghiệm của một bất đẳng thức parabolic

On the nonexistence of solutions of a parabolic inequality

Nguyễn Trung Hiếu[a,b], Phan Quốc Hưng[a,b], Mai Ti Na[a,b,*]
Hieu Nguyen[a,b], Quoc Hung Phan[a,b], Tina Mai[a,b,*]

a. Viện Nghiên cứu và Phát triển Công nghệ Cao, Trường Đại học Duy Tân, Đà Nẵng, Việt Nam
b. Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Duy Tân, Đà Nẵng, Việt Nam

a. Institute of Research and Development, Duy Tan University, Da Nang, 550000, Vietnam
b. Faculty of Natural Sciences, Duy Tan University, Da Nang, 550000, Vietnam

(Ngày nhận bài: 01/07/2020, ngày phản biện xong: 20/07/2020, ngày chấp nhận đăng: 20/08/2020)

Tóm tắt

Chúng tôi đưa ra một chứng minh đơn giản về sự không tồn tại nghiệm dương của bất đẳng thức parabolic $u_t - \Delta u \geq u^p$ trong không gian $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Chứng minh của chúng tôi dựa trên một lập luận mới về nguyên lý cực đại.

Từ khóa: Kết quả Fujita; định lý kiểu Liouville; bất đẳng thức parabolic.

Abstract

We put forward a simple proof of the nonexistence of positive solutions of a parabolic inequality $u_t - \Delta u \geq u^p$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Our proof is based on a new argument of maximum principle.

Keywords: Fujita result, Liouville-type theorem; parabolic inequality.

1. Mở đầu

Chúng tôi nghiên cứu định lý kiểu Liouville cho nghiệm cổ điển của bất đẳng thức parabolic

$$u_t - \Delta u \geq u^p, \tag{1}$$

trong không gian $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Số mũ p được xét ở đây là số mũ thực tùy ý. Bất đẳng thức (1) đã được nghiên cứu rộng rãi và được xem là một trong những bài toán cơ bản nhất của phương trình đạo hàm riêng phi tuyến, xem [1, 2, 3, 4].

Định lý kiểu Liouville cho bài toán parabolic là sự không tồn tại nghiệm không tầm thường trong toàn bộ không gian $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ hoặc nửa không gian $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$. Trong những năm gần đây, định lý kiểu Liouville trở thành một trong những công cụ quan trọng để nghiên cứu các bài toán biên và các bài toán giá trị ban đầu của phương trình đạo hàm riêng phi tuyến, bởi vì rất nhiều tính chất định tính của nghiệm là hệ quả của định lý kiểu Liouville (xem [5]).

Đối với bài toán (1), kết quả Fujita khẳng định sự không tồn tại nghiệm không tầm thường trên nửa không gian $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ với điều kiện số mũ $1 < p \leq \frac{N+2}{N}$, xem [1] và [2, 6, 7, 8]. Kết quả

Corresponding Author: Tina Mai; Institute of Research and Development, Duy Tan University, Da Nang, 550000, Vietnam; Faculty of Natural Sciences, Duy Tan University, Da Nang, 550000, Vietnam.
Email: maitina@duytan.edu.vn

trên chứng minh sự không tồn tại nghiệm không âm không tầm thường của bài toán (1) trong toàn không gian $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ với điều kiện $1 < p \le \frac{N+2}{N}$. Khi $p > \frac{N+2}{N}$, kết quả trong [9, Example 1] chỉ ra rằng hàm số

$$u(x,t) = \begin{cases} kt^{-\frac{1}{p-1}} \exp(-\gamma \frac{1+|x|^2}{t}) & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^N, \\ 0 & t \le 0,\ x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{2}$$

là một nghiệm không âm không tầm thường của (1) trong $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, với k và γ là các hằng số được chọn sao cho

$$\begin{cases} \frac{1}{2N(p-1)} < \gamma \le \frac{1}{4}, \\ 0 < k \le \left(2N\gamma - \frac{1}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}. \end{cases}$$

Khi $p = 1$, dễ thấy rằng hàm số $u(x,t) = e^t$ là một nghiệm dương của (1) trong $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Ngoài ra, khi $0 < p < 1$, hàm số

$$u(x,t) = \begin{cases} t^{\frac{1}{1-p}} & \text{nếu } t > 0, \\ 0 & \text{nếu } t \le 0 \end{cases} \tag{3}$$

là một nghiệm không âm không tầm thường của (1) trong $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Từ đây, ta có định lý Liouville tối ưu cho nghiệm không âm của bài toán (1) như sau.

Định lý A. *Giả sử $p > 0$, khi đó bài toán* (1) *không có nghiệm không âm không tầm thường trong $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu $1 < p \le \frac{N+2}{N}$.*

Chú ý rằng kết quả Liouville cho nghiệm dương khác biệt so với nghiệm không âm. Ta thấy nghiệm được xây dựng ở (3) (tương ứng ở (2)) cho trường hợp $p \in (0,1)$ (tương ứng $p > \frac{N+2}{N}$) có không điểm khi $t \le 0$. Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là có tồn tại hay không nghiệm dương của bài toán (1) trong trường hợp $p \in (-\infty, 1)$ hoặc $p > \frac{N+2}{N}$. Trong bài báo này chúng tôi đưa ra câu trả lời cho trường hợp $p \in (-\infty, 1)$. Kết quả chính của chúng tôi như sau.

Định lý 1. *Bài toán* (1) *không có nghiệm dương trong $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ nếu $p < 1$.*

Dựa vào kết quả của Định lý 1 và Định lý A, ta thu được kết quả về sự không tồn tại nghiệm dương của bài toán (1) trong $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ với điều kiện của số mũ là

$$p \in (-\infty, 1) \cup (1, (N+2)/N].$$

Sau đây ta sẽ đi vào chứng minh Định lý 1.

2. Chứng minh Định lý 1

Giả sử phản chứng rằng bài toán (1) có nghiệm dương u trong $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$.

Đặt $z := u^{-1}$, khi đó bài toán (1) trở thành

$$-z_t + \Delta z - 2\frac{|\nabla z|^2}{z} \ge z^{2-p}. \tag{4}$$

Chọn $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ là hàm cut-off thỏa mãn $\phi = 1$ trên tập $\{(x,t) : |x|^2 + |t| \le 1\}$ và $\phi = 0$ trên $\{(x,t) : |x|^2 + |t| > 2\}$. Với mỗi $R > 0$, ta đặt

$$\begin{cases} \phi_R(x,t) = \phi^m\left(x/R, t/R^2\right), \\ z_R(x,t) = z(x,t)\phi_R(x,t), \end{cases}$$

với $m > 0$ sẽ được chọn phù hợp. Dễ thấy rằng

$$|\partial_t \phi_R| \le \frac{C}{R^2}\phi_R^{\frac{m-1}{m}} \text{ và } |\Delta \phi_R| \le \frac{C}{R^2}\phi_R^{\frac{m-2}{m}}. \tag{5}$$

Do giá của hàm z_R là compact, nên tồn tại $(x_R, t_R) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ sao cho

$$z_R(x_R, t_R) = \max_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}} z_R(x,t).$$

Theo tính chất cực trị địa phương, tại điểm (x_R, t_R) ta có

$$\begin{cases} \partial_t z_R = 0, \\ \nabla z_R = 0, \\ \Delta z_R \le 0. \end{cases}$$

Ta suy ra được rằng

$$z_t = -\frac{z\partial_t \phi_R}{\phi_R}, \nabla z = -\frac{z\nabla \phi_R}{\phi_R} \tag{6}$$

và

$$-\frac{(2\nabla z.\nabla \phi_R + z\Delta \phi_R)}{\phi_R} \ge \Delta z \tag{7}$$

tại (x_R, t_R). Bằng cách thay thế (6) và (7) vào trong (4), tại điểm (x_R, t_R) ta có

$$\frac{z\partial_t \phi_R}{\phi_R} - \frac{(2\nabla z.\nabla \phi_R + z\Delta \phi_R)}{\phi_R} + 2\frac{\nabla z}{z}.\frac{z\nabla \phi_R}{\phi_R} \ge z^{2-p}.$$

Điều này tương đương với

$$z\partial_t\phi_R - z\Delta\phi_R \geq z^{2-p}\phi_R \tag{8}$$

tại (x_R, t_R). Kết hợp (5) với (8), ta suy ra tại điểm (x_R, t_R) rằng

$$z^{2-p}\phi_R \leq \frac{C}{R^2} z\left(\phi_R^{\frac{m-1}{m}} + \phi_R^{\frac{m-2}{m}}\right) \leq \frac{C}{R^2} z\phi_R^{\frac{m-2}{m}}. \tag{9}$$

Chọn $m = \frac{2}{1-p}$, khi đó (9) trở thành

$$z^{2-p}\phi_R^{2-p} \leq \frac{C}{R^2} z\phi_R \tag{10}$$

tại (x_R, t_R). Do đó,

$$z_R^{1-p}(x_R, t_R) \leq \frac{C}{R^2}. \tag{11}$$

Cho $R \to \infty$ trong (11) và chú ý $1-p > 0$, ta có

$$z_R(x_R, t_R) \to 0 \text{ khi } R \to \infty.$$

Vì $z_R(x_R, t_R) \to \sup_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}} z$ khi $R \to \infty$, ta suy ra rằng

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}} z = 0.$$

Điều này mâu thuẫn với $z > 0$. Định lý được chứng minh.

Tài liệu tham khảo

[1] Hiroshi Fujita. On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I*, 13:109–124 (1966), 1966.

[2] Vasilii V. Kurta. A Liouville comparison principle for solutions of semilinear parabolic inequalities in the whole space. *Adv. Nonlinear Anal.*, 3(2):125–131, 2014.

[3] Pavol Quittner and Philippe Souplet. *Superlinear parabolic problems: Blow-up, global existence and steady states.* Basler Lehrbücher. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[4] Steven D. Taliaferro. Blow-up of solutions of nonlinear parabolic inequalities. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 361(6):3289–3302, 2009.

[5] Peter Poláčik, Pavol Quittner, and Philippe Souplet. Singularity and decay estimates in superlinear problems via Liouville-type theorems. II. Parabolic equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 56(2):879–908, 2007.

[6] Pierre Baras and Michel Pierre. Critère d'existence de solutions positives pour des équations semi-linéaires non monotones. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2(3):185–212, 1985.

[7] Enzo Mitidieri and Stanislav I. Pohozaev. A priori estimates and the absence of solutions of nonlinear partial differential equations and inequalities. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 234:1–384, 2001.

[8] Ross G. Pinsky. Existence and nonexistence of global solutions for $u_t = \Delta u + a(x)u^p$ in $\mathbf{R}^d$. *J. Differential Equations*, 133(1):152–177, 1997.

[9] Vasilii V. Kurta. A Liouville comparison principle for solutions of quasilinear singular parabolic inequalities. *Adv. Nonlinear Anal.*, 4(1):1–11, 2015.