

Chuyển pha trạng thái điện môi exciton/sóng mật độ điện do thăng giáng nhiệt trong vật liệu bán kim loại

Excitonic insulator/charge density wave transition induced by thermal fluctuations in semimetal materials

Đỗ Thị Hồng Hải^a, Phan Văn Nhâm^{b,c,*}
Hong Hai Do Thi^a, Van Nham Phan^{b,c,*}

^aTrường Đại học Mỏ - Địa chất, 18 Phố Viên, Bắc Từ Liêm, Hà Nội, Việt Nam

^bViện Nghiên cứu và Phát triển Công nghệ Cao, Trường Đại học Duy Tân, Đà Nẵng, 550000, Việt Nam

^cKhoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Duy Tân, Đà Nẵng, 550000, Việt Nam

^aHanoi University of Mining and Geology, 18 Vien street, Bac Tu Liem, Hanoi, Vietnam

^bInstitute of Research and Development, Duy Tan University, Da Nang, 550000, Vietnam

^cFaculty of Nature Sciences, Duy Tan University, Da Nang, 550000, Vietnam

(Ngày nhận bài: 11/05/2020, ngày phản biện xong: 26/06/2020, ngày chấp nhận đăng: 27/6/2020)

Tóm tắt

Chuyển pha trạng thái điện môi exciton (EI) kết hợp với sóng mật độ điện tích (CDW) trong vật liệu bán kim loại được khảo sát thông qua nghiên cứu mô hình hai dải năng lượng hai chiều có tương tác điện tử - phonon. Áp dụng gần đúng trường trung bình, chúng tôi thu được hệ phương trình tự hợp nhằm xác định tham số trật tự trạng thái điện môi exciton và biến dạng mạng. Kết quả tính số cho phép chúng tôi khảo sát sự phụ thuộc của tham số trật tự trạng thái EI và độ lệch mạng tinh thể vào nhiệt độ và áp suất. Giản đồ pha được thiết lập, khẳng định sự tồn tại *trạng thái EI kết hợp với lệch mạng tinh thể* khi hệ ở nhiệt độ đủ thấp.

Từ khóa: Trạng thái EI/CDW; tương tác điện tử - phonon; gần đúng trường trung bình; thăng giáng nhiệt.

Abstract

Excitonic insulator transition accompanied by a charge density wave state in semimetal materials is examined by considering the two-band model involving electron - phonon interaction. Adapting the mean-field theory, we have derived a set of selfconsistent equations, which allows us to determine both the excitonic insulator order parameter and the lattice displacement. Numerical results permit us establish the temperature and the external pressure dependence of the EI order parameter and the lattice displacement. Phase diagrams release an existence of the EI state with the lattice distortion at sufficiently low temperatures.

Keywords: EI/CDW state; electron - phonon interaction; mean-field theory; thermal fluctuations.

* Corresponding Author: Van-Nham Phan, Institute of Research and Development, Duy Tan University, Da Nang, 550000, Vietnam; Faculty of Nature Sciences, Duy Tan University, Da Nang, 550000, Vietnam.

Email: phanvannham@duytan.edu.vn

1. Mở đầu

Trạng thái điện môi exciton (excitonic insulator - EI) là một trong những vấn đề hấp dẫn trong vật lý các chất đông đặc, đã và đang thu hút sự quan tâm rất lớn của các nhà vật lý trên thế giới. Mặc dù được đề xuất về mặt lý thuyết từ hơn 60 năm trước [1], nhưng do exciton có thời gian sống ngắn nên những kết quả thực nghiệm để chứng thực trạng thái này vẫn còn hạn chế. Gần đây, với việc tìm ra các vật liệu có triển vọng để quan sát trạng thái này trong thực nghiệm đã làm hồi lại những quan tâm nghiên cứu về mặt lý thuyết.

Về mặt lý thuyết, trạng thái điện môi exciton thường được nghiên cứu thông qua khảo sát trong khuôn khổ các mô hình hoàn toàn điện tử, ví dụ như mô hình khối lượng hiệu dụng Mott-Wannier [2, 3] hay mô hình Falicov-Kimball [4 - 6]. Trong đó, tương tác giữa điện tử với phonon đã được bỏ qua. Tuy nhiên, các hệ điện tử thấp chiều rất dễ bị biến dạng cấu trúc do tương tác điện tử - phonon [7], điển hình là sự bất ổn định Peierls trong các kim loại một chiều [8]. Tuy nhiên, các nghiên cứu thực nghiệm quan sát gần đây trên một số vật liệu đã cho thấy biến dạng mạng tinh thể là đáng kể và là cơ sở để hình thành trạng thái EI [9 - 12]. Ví dụ như, trong kim loại chuyển tiếp 1T-TiSe₂, kết quả thực nghiệm sự phụ thuộc nhiệt độ của quang phổ điện tử đã cho thấy trạng thái EI xuất hiện đồng thời với trạng thái sóng mật độ điện tích (charge density wave - CDW) ở nhiệt độ thấp [11, 12]. Cũng trong vật liệu này, sóng mật độ điện tích đã được quan sát kèm theo sự biến dạng mạng tuần hoàn yếu [10]. Rõ ràng sự lệch mạng hay các ảnh hưởng phonon là vô cùng quan trọng trong việc hình thành trạng thái điện môi exciton ở các loại vật liệu này. Do vậy, sự tương tác điện tử/lỗ trống - phonon cần phải được xem xét kỹ lưỡng.

Trong thời gian gần đây, biến dạng mạng gây ra trạng thái EI đã thu hút được sự quan

tâm của cả các nhà nghiên cứu lý thuyết. Tuy vậy, các nghiên cứu về mối quan hệ của trạng thái EI và CDW khi xét đến ảnh hưởng của phonon mới chỉ dừng lại ở trạng thái cơ bản, tức là, tại nhiệt độ không [13 - 16]. Khi nhiệt độ cao, liên kết điện tử - lỗ trống có thể bị phá hủy bởi thăng giáng nhiệt và hệ khi đó chuyển sang trạng thái plasma của điện tử và lỗ trống. Vì vậy, nghiên cứu ảnh hưởng của nhiệt độ lên các trạng thái này là cần thiết. Khi nghiên cứu trạng thái EI trong vật liệu bán kim loại 1T-TiSe₂, bằng việc áp dụng lý thuyết siêu dẫn BCS cho exciton, C. Monney cùng cộng sự đã khẳng định mối liên hệ giữa trạng thái EI với trạng thái CDW [17, 18]. Tuy nhiên, chi tiết về mối liên hệ giữa hai trạng thái này cũng chưa được đề cập đến.

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu lý thuyết về sự hình thành trạng thái điện môi exciton kết hợp với trạng thái sóng mật độ điện tích trong mô hình hai chiều hai dải năng lượng có tương tác điện tử - phonon bằng lý thuyết trường trung bình tĩnh. Trong đó, chúng tôi tập trung nghiên cứu ảnh hưởng của nhiệt độ và áp suất ngoài lên tham số trật tự trạng thái EI và độ lệch mạng tinh thể.

Bài báo được chia thành 4 phần. Trong đó, trong phần 2 chúng tôi trình bày mô hình điện tử hai chiều hai dải năng lượng có tương tác điện tử - phonon và áp dụng lý thuyết trường trung bình tĩnh cho mô hình. Từ đó chúng tôi rút ra hệ phương trình tự hợp cho phép xác định tham số trật tự trạng thái EI và giải hệ phương trình tự hợp bằng phương pháp tính số. Phần 3 chúng tôi trình bày kết quả tính số và thảo luận. Cuối cùng, kết luận của bài báo được trình bày trong phần 4.

2. Mô hình và phương pháp lý thuyết

Để khảo sát trạng thái EI/CDW trong vật liệu bán kim loại, chúng ta xét mô hình điện tử hai chiều hai dải năng lượng có sự liên kết với phonon được mô tả bởi Hamiltonian sau:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_{ph} + \mathcal{H}_{e-ph}, \quad (1)$$

trong đó, thành phần không tương tác của hệ điện tử trên dải dẫn c và điện tử trên dải hóa trị f là:

$$\mathcal{H}_e = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}}^c c_{\mathbf{k}}^\dagger c_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}}^f f_{\mathbf{k}}^\dagger f_{\mathbf{k}}, \quad (2)$$

với $c_{\mathbf{k}}^\dagger$ ($c_{\mathbf{k}}$), $f_{\mathbf{k}}^\dagger$ ($f_{\mathbf{k}}$) lần lượt là các toán tử sinh (hủy) của các điện tử c và điện tử f mang xung lượng \mathbf{k} . Các năng lượng kích thích điện tử c và điện tử f được cho bởi

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{c,f} = \varepsilon^{c,f} - t^{c,f} \gamma_{\mathbf{k}} - \mu, \quad (3)$$

với $\varepsilon^{c,f}$ là năng lượng tại nút của điện tử c và điện tử f ; $t^{c,f}$ là tích phân nhảy nút. Trong mạng hai chiều hình vuông với hằng số mạng $a = 1$, ta có $\gamma_{\mathbf{k}} = 2(\cos k_x + \cos k_y)$ chỉ bước nhảy trong mạng tinh thể và μ là thế hóa học.

Phần năng lượng mô tả hệ phonon không tương tác là:

$$\mathcal{H}_{ph} = \omega_0 \sum_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{q}}, \quad (4)$$

với $b_{\mathbf{q}}^\dagger$ ($b_{\mathbf{q}}$) là các toán tử sinh (hủy) phonon mang xung lượng \mathbf{q} với tần số không đổi ω_0 . Số hạng cuối cùng trong Hamiltonian (1) mô tả phần năng lượng tương tác của hệ điện tử với phonon

$$\mathcal{H}_{e-ph} = \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \left[c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger f_{\mathbf{k}}^\dagger (b_{-\mathbf{q}}^\dagger + b_{\mathbf{q}}) + H.c. \right], \quad (5)$$

với g là hằng số tương tác điện tử - phonon và N là số nút mạng tinh thể. Tại nhiệt độ đủ thấp, các exciton với xung lượng hữu hạn $\mathbf{Q} = (\pi, \pi)$ có thể ngưng tụ, được thể hiện bởi giá trị trung bình tại xung lượng \mathbf{k} $d_{\mathbf{k}} = \langle c_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^\dagger f_{\mathbf{k}} \rangle$ khác không. Đại lượng này biểu thị sự lai hóa giữa các điện tử c và điện tử f nên được gọi là tham số trật tự trạng thái EI.

Trong gần đúng trường trung bình, khi số hạng thăng giáng được bỏ qua, Hamiltonian trong phương trình (1) dễ dàng được chéo hóa bằng phép biến đổi Bogoliubov [19] định nghĩa

các toán tử giả hạt fermion mới $C_{1\mathbf{k}}$ và $C_{2\mathbf{k}}$ khi toán tử phonon mới được định nghĩa

$$B_{\mathbf{q}}^\dagger = b_{\mathbf{q}}^\dagger + \sqrt{N} \frac{h}{\omega_0} \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{Q}} \quad (6)$$

với

$$h = \frac{g}{N} \sum_{\mathbf{k}} \langle c_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^\dagger f_{\mathbf{k}} + f_{\mathbf{k}}^\dagger c_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}} \rangle \quad (7)$$

Hamiltonian chéo hóa hoàn toàn cuối cùng có dạng

$$\mathcal{H}_{dia} = \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}^1 C_{1\mathbf{k}}^\dagger C_{1\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}^2 C_{2\mathbf{k}}^\dagger C_{2\mathbf{k}} + \omega_0 \sum_{\mathbf{q}} B_{\mathbf{q}}^\dagger B_{\mathbf{q}}, \quad (8)$$

với các năng lượng tán sắc giả hạt

$$E_{\mathbf{k}}^{1,2} = \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^c + \varepsilon_{\mathbf{k}}^f}{2} \mp \frac{\text{sgn}(\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^c - \varepsilon_{\mathbf{k}}^f)}{2} W_{\mathbf{k}}, \quad (9)$$

trong đó:

$$W_{\mathbf{k}} = \left[(\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^c - \varepsilon_{\mathbf{k}}^f)^2 + 4|\Delta|^2 \right]^{1/2}, \quad (10)$$

với

$$\Delta = \frac{g}{\sqrt{N}} \langle b_{\mathbf{Q}}^\dagger + b_{-\mathbf{Q}} \rangle, \quad (11)$$

Từ đây, chúng ta xác định được tham số trật tự trạng thái EI

$$d_{\mathbf{k}} = -\text{sgn}(\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^c - \varepsilon_{\mathbf{k}}^f) \left[n(E_{\mathbf{k}}^1) - n(E_{\mathbf{k}}^2) \right] \frac{\Delta}{W_{\mathbf{k}}}, \quad (12)$$

với $n(E_{\mathbf{k}}^{1,2})$ là hàm phân bố Fermi-Dirac. Tham số trật tự khác không thể hiện hệ ở trạng thái EI. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng xem đại lượng

$$d = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \left(\langle c_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^\dagger f_{\mathbf{k}} \rangle + \langle f_{\mathbf{k}}^\dagger c_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}} \rangle \right) \quad (13)$$

như tham số trật tự trạng thái EI.

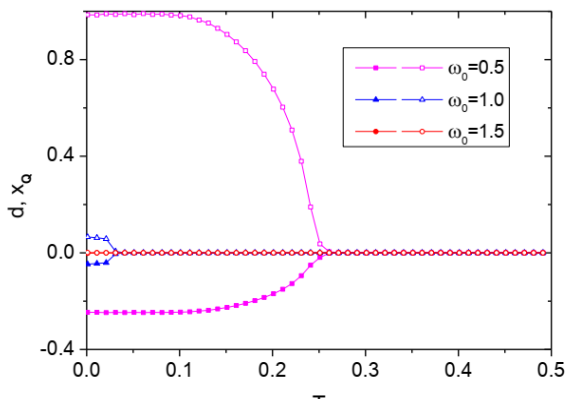
Độ lệch mạng của tinh thể trong trạng thái EI ứng với xung lượng \mathbf{Q} là:

$$x_{\mathbf{Q}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \langle b_{\mathbf{Q}}^\dagger + b_{\mathbf{Q}} \rangle = -\frac{h}{\omega_0} \sqrt{\frac{2}{\omega_0}} \quad (14)$$

Như vậy, từ các phương trình (7) và (9) - (14), ta thu được hệ phương trình tự hợp cho phép xác định tham số trật tự trạng thái EI và độ lệch mạng tinh thể ứng với mỗi thể hóa μ .

3. Kết quả tính số và thảo luận

Trong phần này, chúng tôi trình bày kết quả tính số để thảo luận ảnh hưởng của nhiệt độ lên trạng thái EI/CDW trong mô hình. Trong bài toán này, để khảo sát chúng tôi chọn hệ hai chiều với $N=200 \times 200$ nút mạng. Không



Hình 1: Tham số trật tự d (lấp đầy) và độ lệch mạng x_Q (rỗng) phụ thuộc vào nhiệt độ ứng với một vài giá trị của tần số phonon khi $\varepsilon^c - \varepsilon^f = 1$.

giảm tính tổng quát, chúng tôi chọn $t^c = 1$ coi là đơn vị của năng lượng và cố định $t^f = 0.3$ đảm bảo dải dẫn rộng hơn dải hóa trị hay điện tử c định xứ hơn. Chúng tôi quan tâm tới trạng thái lấp đầy một nửa, khi đó thể hóa μ được thay đổi để thỏa mãn $n^c + n^f = 1$. Các kết quả tính toán được thực hiện trong hệ đơn vị năng lượng tổng quát với $\hbar = c = k_B = 1$.

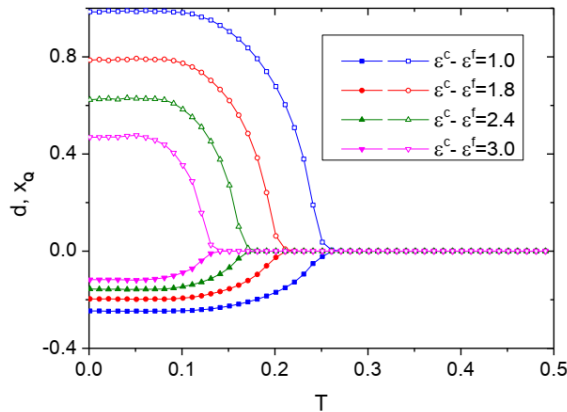
Để mô tả kịch bản ngưng tụ của exciton liên hệ với biến dạng mạng trong mô hình trên, chúng ta sẽ khảo sát chi tiết tính chất của tham số trật tự d và độ lệch mạng x_Q . Thực vậy, như đã thảo luận ở trên d khác không thể hiện sự lai hóa giữa các điện tử c và điện tử f , hệ tồn tại ở trạng thái EI. Còn x_Q khác không biểu thị sự lệch mạng tinh thể, tương ứng với trạng thái CDW. Trong một vài nghiên cứu gần đây của

chúng tôi, kết quả cho thấy exciton ngưng tụ khi hằng số tương tác điện tử - phonon đủ lớn [20-22], do vậy trong bài báo này chúng tôi cố định $g = 0.5$.

Hình 1 mô tả sự phụ thuộc nhiệt độ của tham số trật tự trạng thái EI d và độ lệch mạng x_Q ứng với một vài giá trị khác nhau của tần số phonon khi mức độ xen phủ của hai dải năng lượng $\varepsilon^c - \varepsilon^f = 1$. Kết quả cho thấy mối liên hệ mật thiết của d và x_Q trong toàn thang nhiệt độ. Đối với một giá trị xác định của tần số phonon ω_0 thì d và x_Q đồng thời khác không khi nhiệt độ nhỏ hơn giá trị nhiệt độ tới hạn T_c . Giá trị của tham số trật tự trạng thái EI và độ lệch mạng cùng giảm nếu nhiệt độ tăng lên và cùng biến mất hoàn toàn ở nhiệt độ tới hạn T_c . Điều đó thể hiện hệ ổn định trong trạng thái ngưng tụ exciton kết hợp với trạng thái sóng mật độ điện tích (EI/CDW) ở nhiệt độ dưới T_c và T_c được gọi là nhiệt độ chuyển pha trạng thái EI/CDW. Sóng mật độ điện tích là trạng thái trong đó mật độ điện tích thay đổi có tính tuần hoàn với chu kỳ khác với chu kỳ của mạng tinh thể cùng với sự xuất hiện khe năng lượng tại mức Fermi [23]. Giá trị tới hạn T_c này giảm khi tăng tần số phonon. Khi $T > T_c$, hệ ổn định trong trạng thái plasma của điện tử. Rõ ràng, trạng thái EI ổn định ở nhiệt độ thấp, tương tự như trường hợp siêu dẫn. Đáng chú ý phụ thuộc nhiệt độ của tham số trật tự trạng thái EI thu được cũng có dạng tương tự như tham số khe siêu dẫn. Điều này khẳng định sự tương tự của trạng thái EI trong trường hợp này với sự ngưng tụ của các cặp Cooper trong lý thuyết BCS.

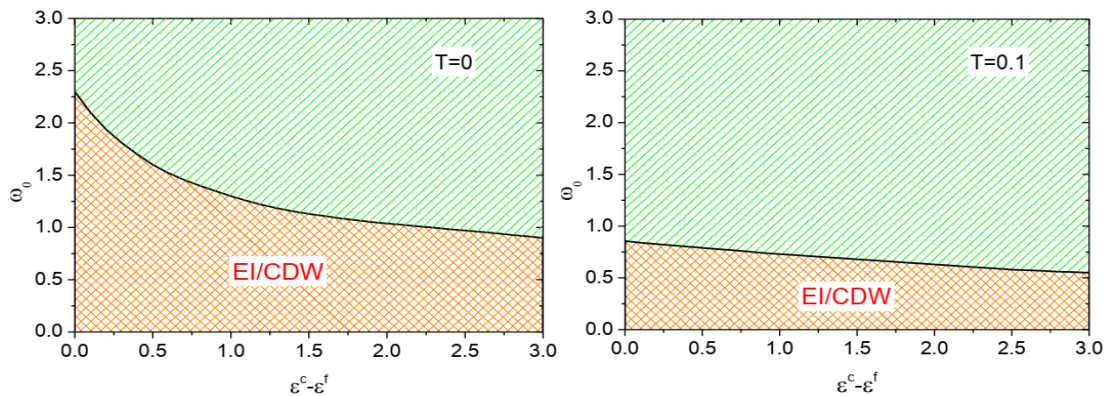
Tiếp theo, chúng tôi khảo sát sự tồn tại của trạng thái EI/CDW trong hệ khi tính tới sự thay đổi mức độ xen phủ của hai dải năng lượng. Mức độ xen phủ của các dải năng lượng thể hiện ảnh hưởng của áp suất ngoài tác dụng lên hệ. Hình 2 biểu thị sự phụ thuộc của tham số trật tự trạng thái EI d và độ lệch mạng x_Q vào nhiệt độ với một vài giá trị khác nhau của mức

độ xen phủ của hai dải năng lượng $\varepsilon^c - \varepsilon^f$ khi $\omega_0 = 0.5$. Kết quả vẫn cho thấy kịch bản tương tự giữa độ lệch mạng x_Q và tham số trật tự d khi



Hình 2: Tham số trật tự d (lấp đầy) và độ lệch mạng x_Q (rỗng) là hàm của nhiệt độ T với $\omega_0 = 0.5$ khi $\varepsilon^c - \varepsilon^f$ thay đổi.

nhiệt độ thay đổi. Cả d và x_Q đều cùng biến mất nếu nhiệt độ cao hơn nhiệt độ chuyển pha trạng thái EI/CDW. Dưới nhiệt độ này, cả độ lệch mạng x_Q và tham số trật tự d đồng thời khác không thể hiện hệ ổn định trong trạng thái EI/CDW. Khi giảm áp suất ngoài tác dụng lên hệ thì $\varepsilon^c - \varepsilon^f$ tăng, tức là giảm mức độ xen phủ giữa hai dải năng lượng, làm giảm khả năng kết cặp của điện tử c và điện tử f hình thành exciton, do đó trạng thái EI/CDW bị suy yếu được thể hiện bởi sự giảm giá trị của cả x_Q và d . Khi đó, giá trị nhiệt độ tới hạn cho chuyển pha trạng thái EI/CDW cũng giảm theo. Sự phụ thuộc nhiệt độ của tham số trật tự d trong Hình 1 và Hình 2 phù hợp khá tốt với các quan sát thực nghiệm gần đây ở hệ bán hai chiều 1T - TiSe_2 [11].



Hình 3: Giản đồ pha trạng thái EI/CDW của mô hình trong mặt phẳng $(\varepsilon^c - \varepsilon^f, \omega_0)$ với $g = 0.5$ khi T thay đổi. Pha điện môi exciton kết hợp với sóng mật độ điện tích (EI/CDW) được biểu thị bởi vùng kẻ caro.

Cuối cùng, chúng tôi biểu thị trên Hình 3 mối quan hệ của tần số phonon và mức độ xen phủ của hai dải năng lượng điện tử $c - f$ khi nhiệt độ thay đổi. Giản đồ pha cho thấy tại một nhiệt độ đủ thấp xác định, trạng thái EI/CDW được thiết lập khi tần số phonon nhỏ hơn một giá trị tới hạn ω_{0c} . Khi giảm áp suất thì $\varepsilon^c - \varepsilon^f$ tăng hay giảm mức độ xen phủ của hai dải năng lượng thì giá trị tới hạn này càng giảm. Điều này hoàn toàn có thể giải thích được nếu ta biết rằng khi tăng $\varepsilon^c - \varepsilon^f$, mặt Fermi giảm dần tới

giảm khả năng ghép cặp của điện tử c và điện tử f , đồng thời chỉ những phonon với tần số nhỏ mới hỗ trợ sự kết hợp điện tử $c - f$ hình thành exciton. Giản đồ cũng cho thấy, khi tăng nhiệt độ thì giá trị tới hạn ω_{0c} của tần số phonon giảm và vùng ngưng tụ exciton bị thu hẹp lại. Thật vậy, khi nhiệt độ tăng, thăng giáng nhiệt lớn làm phá hủy một phần trạng thái liên kết điện tử $c - f$, trạng thái EI/CDW vì vậy bị suy yếu.

4. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã khảo sát ảnh hưởng của nhiệt độ và áp suất ngoài lên trạng thái EI/CDW trong hệ bán hai chiều thông qua áp dụng lý thuyết trường trung bình tĩnh cho mô hình hai chiều hai dải năng lượng có tương tác điện tử - phonon. Trong đó, chúng tôi đã rút ra hệ phương trình tự hợp cho phép xác định các tham số trật tự trạng thái EI của mô hình và độ lệch mạng tinh thể. Giải hệ phương trình tự hợp bằng phương pháp tính số, kết quả tính số cho thấy, với tương tác điện tử - phonon đủ lớn, sự ổn định của hệ trong trạng thái EI và sự lệch mạng tinh thể có liên quan mật thiết với nhau ở nhiệt độ đủ thấp. Còn khi nhiệt độ cao hơn nhiệt độ tới hạn thì trạng thái liên kết của các điện tử $c - f$ bị phá hủy hoàn toàn bởi sự thăng giáng nhiệt, do vậy hệ chuyển sang trạng thái plasma của điện tử. Bên cạnh đó, khi giảm áp suất ngoài tác dụng lên hệ làm giảm khả năng kết cặp của điện tử c và điện tử f hình thành exciton, do đó trạng thái EI/CDW bị suy yếu. Mọi quan hệ của áp suất, nhiệt độ và tần số phonon trong việc hình thành trạng thái EI/CDW cũng được chúng tôi chỉ ra trong giản đồ pha. Khi tăng nhiệt độ thì giá trị tới hạn của tần số phonon giảm ứng với một giá trị xác định của áp suất ngoài và vùng ngưng tụ exciton bị thu hẹp lại. Những nghiên cứu kỹ lưỡng hơn về ảnh hưởng của phonon bao gồm cả mode âm học và quang học lên trạng thái này sẽ được chúng tôi thực hiện trong tương lai.

Tài liệu tham khảo

- [1] N. F. Mott. The transition to the metallic state. *Philos. Mag.*, 6, 287, 1961.
- [2] F. X. Bronold and H. Fehske. Possibility of an excitonic insulator at the semiconductor-semimetal transition. *Phys. Rev. B*, 74, 165107, 2006
- [3] C. Monney, E. F. Schwier, M. G. Garnier, N. Mariotti, C. Didiot, H. Cercellier, J. Marcus, H. Berger, A. N. Titov, H. Beck, and P. Aebi. Probing the exciton condensate phase in 1T-TiSe₂ with photoemission. *New J. Phys.*, 12, 125019, 2010.
- [4] D. Ihle, M. Pfafferoth, E. Burovski, F. X. Bronold, and H. Fehske. Bound state formation and nature of the excitonic insulator phase in the extended Falicov-Kimball model. *Phys. Rev. B*, 78, 193103, 2008.
- [5] N. V. Phan, H. Fehske, and K. W. Becker. Excitonic resonances in the 2D extended Falicov-Kimball model. *Europhys. Lett.*, 95, 17006, 2011.
- [6] B. Zenker, D. Ihle, F. X. Bronold, and H. Fehske. On the existence of the excitonic insulator phase in the extended Falicov-Kimball model: a SO(2)-invariant slave-boson approach. *Phys. Rev. B*, 81, 115122, 2010.
- [7] N. Tsuda, K. Nasu, A. Yanase, and K. Siratori. *Electronic Conduction in Oxides*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [8] R. Peierls. *Quantum theory of solids*. Oxford University Press, Oxford, 1955.
- [9] T. Kaneko, T. Toriyama, T. Konishi, and Y. Ohta. Orthorhombic-tomonoclinic phase transition of Ta₂NiSe₅ induced by the Bose-Einstein condensation of excitons. *Phys. Rev. B*, 87, 035121, 2013.
- [10] F. J. Di Salvo, D. E. Moncton, and J. V. Waszczak. Electronic properties and superlattice formation in the semimetal TiSe₂. *Phys. Rev. B*, 14, 4321, 1976.
- [11] C. Monney, E. F. Schwier, M. G. Garnier, N. Mariotti, C. Didiot, H. Beck, P. Aebi, C. Cercellier, J. Marcus, C. Battaglia, H. Berger, and A. N. Titov. Temperature-dependent photoemission on 1T-TiSe₂: Interpretation within the exciton condensate phase model. *Phys. Rev. B*, 81, 155104, 2010.
- [12] H. Cercellier, C. Monney, F. Clerc, C. Battaglia, L. Despont, M. G. Garnier, H. Beck, P. Aebi and L. Patthey, H. Berger, and L. Forró. Evidence for an excitonic insulator phase in 1T-TiSe₂. *Phys. Rev. Lett.* 99, 146403, 2007.
- [13] B. Zenker, H. Fehske, H. Beck, C. Monney, and A. R. Bishop. Chiral charge order in 1T-TiSe₂: Importance of lattice degrees of freedom. *Phys. Rev. B* 88, 075138, 2013.
- [14] Tatsuya Kaneko, Bernd Zenker, Holger Fehske, and Yukinori Ohta, Competition between excitonic charge and spin density waves: Influence of electron-phonon and Hund's rule couplings, *Phys. Rev. B* 92, 115106, 2015.
- [15] Kosuke Hamada, Tatsuya Kaneko, Shohei Miyakoshi, and Yukinori Ohta, Excitonic Insulator State of the Extended Falicov-Kimball Model in the Cluster Dynamical Impurity Approximation, *Journal of the Physical Society of Japan*, 86, 074709, 2017.
- [16] Hiroshi Watanabe, Kazuhiro Seki, and Seiji Yunoki, Charge-density wave induced by combined electron-electron and electron-phonon interactions in 1T-TiSe₂: A variational Monte Carlo study, *Phys. Rev. B* 91, 205135, 2015.
- [17] C. Monney, C. Battaglia, H. Cercellier, P. Aebi, and H. Beck. Exciton condensation driving the periodic lattice distortion of 1T-TiSe₂. *Phys. Rev. Lett.* 106, 106404, 2011.

- [18] C. Monney, H. Cercellier, F. Clerc, C. Battaglia, E. F. Schwier, C. Didiot, M. G. Garnier, H. Beck, P. Aebi, H. Berger, L. Forró, and L. Patthey. Spontaneous exciton condensation in 1T-TiSe₂: BCS-like approach. *Phys. Rev. B*, 79, 045116, 2009.
- [19] N. N. Bogoliubov, V. V. Tolmachev, and D. V. Shirkov. *New Method in the Theory of Superconductivity*. Consultants Bureau, New York, 1959.
- [20] Thi-Hong-Hai-Do, Huu-Nha-Nguyen, Thi-Giang-Nguyen and Van-Nham-Phan, Temperature effects in excitonic condensation driven by the lattice distortion, *Physica Status Solidi B* 253, 1210, 2016.
- [21] Đỗ Thị Hồng Hải và Phan Văn Nhâm, Ảnh hưởng của tần số phonon lên trạng thái điện môi exciton, *Tạp chí Khoa học và Công nghệ Đại học Duy Tân* 3 (34), 87 - 92, 2019.
- [22] Đỗ Thị Hồng Hải và Phan Văn Nhâm, Exciton ngưng tụ trong mô hình hai dải năng lượng có tương tác điện tử - phonon, *Tạp chí Khoa học và Công nghệ Đại học Duy Tân* 3 (34), 106 - 111, 2019.
- [23] G. Gruner. *Density Waves in Solids*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.