TẠP CHÍ KHOA HỌC & CÔNG NGHỆ ĐẠI HỌC DUY TÂN
DTU Journal of Science and Technology 02(57) (2023) 44-47
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DUY TÂN
DUYTAN UNIVERSITY

Bất đẳng thức điểm cho phương trình song điều hòa

A pointwise inequality for a biharmonic equation

Phan Quốc Hưng[a,b]
Phan Quoc Hung[a,b]

[a]*Viện Nghiên cứu và Phát triển Công nghệ Cao, Đại học Duy Tân, Đà Nẵng, Việt Nam*
[b] *Khoa Môi trường và Khoa học Tự nhiên, Đại học Duy Tân, Đà Nẵng, Việt Nam*

[a]*Institute for Research and Development, Duy Tan University, Da Nang, 550000, Viet Nam*
[b]*Faculty of Environment and Natural Science, Duy Tan University, Da Nang, 550000, Viet Nam*

Ngày nhận bài: 13/02/2023, ngày phản biện xong: 10/03/2023, ngày chấp nhận đăng: 28/03/2023

Tóm tắt

Chúng tôi giải phóng điều kiện bị chặn của nghiệm cho phương trình Hénon cấp bốn $\Delta^2 u = |x|^a u^p$ trong $\mathbb{R}^n$ với $a \geqslant 0$, $p > 1$, $n \geqslant 5$ trong bất đẳng thức điểm của Fazly, Wei, và Xu [*Anal. PDE* **8** (2015) 1541–1563].

Từ khóa: Phương trình song điều hòa; Ước lượng điểm.

Abstract

We relax the boundedness assumption of solutions of the fourth-order Hénon equation $\Delta^2 u = |x|^a u^p$ in $\mathbb{R}^n$ with $a \geqslant 0$, $p > 1$, $n \geqslant 5$ in the pointwise inequality obtained by Fazly, Wei, and Xu in [*Anal. PDE* **8** (2015) 1541–1563].

Keywords: Biharmonic equation; Pointwise estimate.

1. Phát biểu bài toán

Vào năm 2015, Fazly, Wei, và Xu [3] đã đưa ra một bất đẳng thức điểm cho nghiệm dương bị chặn của phương trình Hénon cấp bốn

$$\Delta^2 u = |x|^a u^p \tag{1}$$

trong $\mathbb{R}^n$ với $a \geqslant 0$, $p > 1$, và $n \geqslant 5$. Cụ thể hơn, với u là nghiệm dương bị chặn bất kì của (1) trong $\mathbb{R}^n$, ta luôn có

$$-\Delta u \geqslant \sqrt{\frac{2}{p+1-c_n}} u^{\frac{p+1}{2}} + \frac{2}{n-4}\frac{|\nabla u|^2}{u} \tag{2}$$

với $c_n = 8/(n(n-4))$.

Xét trường hợp khi $a = 0$, phương trình (1) có thể viết dưới dạng hệ

$$\begin{cases} -\Delta u = v, \\ -\Delta v = u^p, \end{cases} \tag{3}$$

trong $\mathbb{R}^n$. Hệ (3) là một trường hợp đặc biệt của hệ Lane-Emden

$$\begin{cases} -\Delta u = v^r, \\ -\Delta v = u^p \end{cases} \tag{4}$$

trong $\mathbb{R}^n$ với $p \geqslant r > 0$. Giả thuyết Lane-Emden phát biểu rằng hệ (4) không có nghiệm dương nếu

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{r+1} > 1 - \frac{2}{n}. \tag{5}$$

*Tác giả liên hệ: Phan Quốc Hưng, Viện Nghiên cứu và Phát triển Công nghệ Cao, Trường Đại học Duy Tân, Đà Nẵng, Việt Nam; Khoa Môi trường và Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Duy Tân, Đà Nẵng, Việt Nam
Email: phanquochung@dtu.edu.vn

Để chứng minh giả thuyết này, bất đẳng thức điểm cho hệ (3) đã được Souplet thiết lập trong [5, Bổ đề 2.7] như sau

$$\frac{u^{p+1}}{p+1} \leqslant \frac{v^{r+1}}{r+1}. \tag{6}$$

Bất đẳng thức này được mở rộng cho hệ Hénon-Lane-Emden system trong [4] và được xem là một cầu nối quan trọng để chứng minh các kết quả về định lí kiểu Liouville cho nghiệm bị chặn [7, 6, 2, 1].

Trong bài báo này, chúng tôi giải phóng điều kiện bị chặn của nghiệm trong [3, Định lí 1.3]. Định lí sau là kết quả cải tiến của chúng tôi.

Theorem 1. *Với u là nghiệm dương của* (1) *với* $n \geqslant 5$. *Giả sử*

$$p > \frac{1}{n-4}(6 + \sqrt{n^2 - 4n + 36}). \tag{7}$$

Khi đó ta có bất đẳng thức điểm

$$-\Delta u \geqslant \sqrt{\frac{2}{(p+1) - c_n}}|x|^{a/2}u^{\frac{p+1}{2}} + \frac{2}{n-4}\frac{|\nabla u|^2}{u} \tag{8}$$

trong $\mathbb{R}^n$, ở đó $c_n = 8/(n(n-4))$ và $0 \leqslant a \leqslant \inf_{k\geqslant 0} A_k$ với hằng số A_k được định nghĩa như trong [3, Eq. (4-28)].

Chứng minh Định lí 1 bao gồm hai bước. Bước thứ nhất là thiết lập bất đẳng thức hàm phù hợp cho hàm bổ trợ, bước thứ hai là sử dụng nguyên lý cực đại để chỉ ra rằng hàm bổ trợ không đổi dấu. Theo phương pháp thông thường, nguyên lý cực đại chỉ sử dụng được khi nghiệm có độ giảm đủ lớn tại vô cùng. Trong bài báo này, phương pháp của chúng tôi đề xuất không cần sử dụng đến độ giảm của nghiệm tại vô cùng.

2. Chứng minh Định lí 1

Chứng minh của chúng tôi hoàn toàn dựa theo các bước như ở [3]. Tuy nhiên, vì chứng minh trong [3] khá dài, chúng tôi chỉ đưa ra những khác biệt dẫn đến việc giải phóng điều kiện bị chặn của nghiệm. Trong [3] giả thiết bị chặn của nghiệm được sử dụng trong chứng minh Bổ đề 2.8 và trong Bổ đề 4.2. Khi có Bổ đề 2.8, các tác giả trong [3] có thể kiểm soát được chuẩn L^2 của Δu. Đây là yếu tố then chốt để sử dụng lí luận feedback trong chứng minh Bổ đề 4.2. Có thể thấy rằng, bước chính mà các tác giả trong [3] sử dụng giả thiết bị chặn của nghiệm là Bổ đề 4.2. Để giải phóng điều kiện này, chúng tôi sẽ chứng minh lại Bổ đề 4.2 trong [3] mà không cần dùng đến giải thiết bị chặn của nghiệm.

Chúng tôi phát biểu lại Bổ đề 4.2 trong [3] như sau:

Lemma 2.1. *Giả sử u là nghiệm dương của* (1). *Đặt*

$$w = \Delta u + \alpha(u+\varepsilon)^{-1}|\nabla u|^2 + \beta|x|^{a/2}u^{(p+1)/2}, \tag{9}$$

với $\varepsilon, \alpha, \beta$ là các hằng số dương. Giả sử rằng w thỏa mãn bất đẳng thức

$$\begin{aligned}\Delta w \geqslant & 2\alpha(u+\varepsilon)^{-1}\nabla u \cdot \nabla w - \alpha w(u+\varepsilon)^{-2}|\nabla u|^2 \\ & + \frac{1}{2}\beta(p+1)|x|^{a/2}u^{(p-1)/2}w.\end{aligned} \tag{10}$$

Giả sử thêm rằng $p + 1 > 2\alpha$, khi đó

$$w \leqslant 0$$

trong $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh. Đặt $\widetilde{w} = (u+\varepsilon)^{-\alpha}w$, bằng các tính toán tương tự như trong chứng minh [3, Bổ đề 4.1, trang 1555], ta có

$$\begin{aligned}\Delta\widetilde{w} \geqslant\ & \alpha w^2(u+\varepsilon)^{-\alpha-1} + (u+\varepsilon)^{-\alpha-1}w(-2\alpha)\Delta u \\ & + \beta(u+\varepsilon)^{-\alpha-1}|x|^{a/2}u^{(p-1)/2}w\Big(\frac{(p+1)\varepsilon}{2} + u(\frac{p+1}{2} + \alpha)\Big).\end{aligned} \tag{11}$$

Chúng ta sẽ chứng minh $\widetilde{w} \leqslant 0$ bằng phản chứng. Giả sử ngược lại rằng

$$M = \sup_{\mathbb{R}^n} w(x) > 0,$$

với $0 < M \leqslant \infty$. Ta chỉ có hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. Nếu x_0 là điểm cực đại của $\widetilde{w}$ trong $\mathbb{R}^n$, tức là $\widetilde{w}(x_0) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\widetilde{w}(x)$ với $\Delta\widetilde{w}(x_0) \leqslant 0$. Nhắc lại rằng $-\Delta u$ luôn luôn lấy giá trị không âm. Khi đó bất đẳng thức (11) tại $x = x_0$ sẽ dẫn đến điều mâu thuẫn.

Trường hợp 2. Supremum của w đạt được tại vô cùng. Lấy ψ là hàm cuff-off trơn trong $\mathbb{R}^n$, $0 \leq \psi \leqslant 1$, $\psi = 1$ in $B_{1/2}$ và $\psi = 0$ khi $|x| > 1$. Đặt $\varphi = \psi^m$ với $m > 2$. Khi đó ta có,

$$\begin{cases} |\Delta\varphi| \leqslant C\varphi^{1-2/m}, \\ \varphi^{-1}|\nabla\varphi|^2 \leqslant C\varphi^{1-2/m}. \end{cases} \tag{12}$$

Với mỗi $R > 1$ ta đặt

$$\varphi_R(x) = \varphi(x/R), \quad \widetilde{w}_R = \varphi_R\widetilde{w}.$$

Chú ý rằng $\widetilde{w}_R$ bằng 0 nếu $|x| > R$, do đó tồn tại $x_R \in B_R$ sao cho

$$M_R := \max_{\mathbb{R}^n}\widetilde{w}_R = \widetilde{w}_R(x_R).$$

Từ cách chọn φ, ta có $M_R \to M$ khi $R \to \infty$, do đó ta có thể giả sử rằng $M_R > 0$ với mọi $R > 1$. Hơn nữa, vì supremum của w chỉ đạt tai vô cùng, ta suy ra rằng $|x_R| \to \infty$ khi $R \to \infty$. Tiếp theo, từ tính chất cực trị địa phương ta có

$$\begin{cases} \nabla\widetilde{w} = -\dfrac{\widetilde{w}}{\varphi_R}\nabla\varphi_R, \\ 0 \geqslant \Delta\widetilde{w}_R \qquad \text{at } x = x_R. \end{cases}$$

Do đó, tại $x = x_R$, ta có

$$\begin{aligned} 0 \geqslant & \Delta\varphi_R\,\widetilde{w} + 2\nabla\varphi_R \cdot \nabla\widetilde{w} + \Delta\varphi_R\,\widetilde{w} \\ = & \varphi_R\,\Delta\widetilde{w} - 2\varphi_R^{-1}|\nabla\varphi_R|^2\widetilde{w} + \Delta\varphi_R\widetilde{w}. \end{aligned}$$

Kết hợp với (12) suy ra

$$CR^{-2}\varphi_R^{1-2/m}\widetilde{w} \geqslant \varphi_R\,\Delta\widetilde{w} \tag{13}$$

tại $x = x_R$. Bây giờ ta sử dụng (11) và chú ý rằng $-\Delta u \geqslant 0$. Tại $x = x_R$, ta có

$$
\begin{aligned}
CR^{-2}\varphi_R^{1-2/m}\widetilde{w} \geqslant \varphi_R\alpha w^2(u+\varepsilon)^{-\alpha-1} \\
+ \frac{p+1}{2}\varphi_R\beta(u+\varepsilon)^{-\alpha-1}|x_R|^{a/2}u^{(p-1)/2}wu.
\end{aligned}
$$

Vì $|x_R| \to \infty$, ta có thể giả sử $|x_R|^{a/2} \geqslant 1$, và do đó tại $x = x_R$ ta có

$$
\begin{aligned}
CR^{-2}\varphi_R^{1-2/m}\widetilde{w} \geqslant &\alpha\varphi_R w^2(u+\varepsilon)^{-\alpha-1} \\
&+ C_1\varphi_R(u+\varepsilon)^{-\alpha-1}u^{(p+1)/2}w.
\end{aligned}
$$

Tức là tại $x = x_R$, ta có

$$
\begin{aligned}
CR^{-2}\varphi_R^{1-2/m} &\geqslant \alpha\varphi_R\widetilde{w}(u+\varepsilon)^{\alpha-1} + C_1\varphi_R(u+\varepsilon)^{-1}u^{(p+1)/2} \\
&= \alpha M_R(u+\varepsilon)^{\alpha-1} + C_1\varphi_R(u+\varepsilon)^{-1}u^{(p+1)/2}.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Bây giờ ta xét hai trường hợp của α:

Trường hợp 2.1. Nếu $\alpha \geqslant 1$, khi đó $(u+\varepsilon)^{\alpha-1} \geqslant \varepsilon^{\alpha-1}$. Ước lượng (14) tại $x = x_R$ cho thấy rằng

$$CR^{-2}\varphi_R^{1-2/m} \geqslant \alpha M_R\varepsilon^{\alpha-1}.$$

Điều này là vô lý khi R đủ lớn.

Trường hợp 2.2. Nếu $\alpha < 1$, khi đó ta giữ lại số hạng đầu tiên trong vế phải của (14), bất đẳng thức

$$CR^{-2}\varphi_R^{1-2/m}(x_R) \geqslant \alpha M_R(u(x_R)+\varepsilon)^{\alpha-1}$$

dẫn đến $u(x_R) \to \infty$ khi $R \to \infty$. Chọn m sao cho $1 - 2/m = 2/(p+1)$, ước lượng (14) tại $x = x_R$ dẫn đến

$$
\begin{aligned}
CR^{-2}\varphi_R^{2/(p+1)}u &\geqslant \alpha M_R(u+\varepsilon)^{\alpha}\frac{u}{u+\varepsilon} + C_1\varphi_R\frac{u}{u+\varepsilon}u^{(p+1)/2} \\
&\geqslant \frac{\alpha}{2}M_R(u+\varepsilon)^{\alpha} + \frac{C_1}{2}\varphi_R u^{(p+1)/2}
\end{aligned} \tag{15}
$$

với R đủ lớn. Ở đây, chúng ta đã sử dụng $u(x_R) \to \infty$ khi $R \to \infty$ để ước lượng $u/(u+\varepsilon)$ từ phía dưới. Kí hiệu $r := (p+1)/2 > 1$, ta suy ra từ (15) rằng

$$CR^{-2}\varphi_R^{1/r}(x_R)u(x_R) \geqslant \frac{C_1}{2}\varphi_R(x_R)u^r(x_R),$$

tức là,

$$\frac{2C}{C_1}R^{-2} \geqslant (\varphi_R^{1/r}(x_R)u(x_R))^{r-1}.$$

Điều này kéo theo $\varphi_R^{1/r}(x_R)u(x_R) \to 0$ khi $R \to \infty$. Ta gặp mâu thuẫn trong (15) khi $R \to \infty$, bởi vì

$$\frac{\alpha}{2}M_R(u(x_R)+\varepsilon)^{\alpha} \to \infty$$

khi $R \to \infty$. Bổ đề được chứng minh. □

Chứng minh Định lí 1. Để chứng minh Định lí 1, chúng ta sử dụng phương pháp lặp kiểu Moser như trong [3, Mục 4]. Thật vậy, đầu tiên ta đặt

$$w_k = \Delta u + \alpha_k(u+\varepsilon)^{-1}|\nabla u|^2 + \beta_k|x|^{a/2}u^{(p+1)/2}, \tag{16}$$

với $k \geqslant -1$. Ở đây $(\alpha_k)_{k\geqslant -1}$ và $(\beta_k)_{k\geqslant -1}$ là hai dãy số không âm sẽ được xác định sau. Như được chứng minh trong [3, Mệnh đề 3.1], ta thấy rằng

$$
\begin{aligned}
\Delta w_{k+1} \geqslant &-2\alpha_{k+1}(u+\varepsilon)^{-1}\nabla u\cdot\nabla w_{k+1} \\
&+ \alpha_{k+1}w_{k+1}(u+\varepsilon)^{-2}|\nabla u|^2 \\
&- \frac{1}{2}\beta(p+1)|x|^{a/2}u^{(p-1)/2}w_{k+1} \\
\geqslant &I^{(1)}_{\varepsilon,\alpha_k,\beta_k}|x|^a u^p + \alpha_{k+1}I^{(2)}_{\alpha_k}|\nabla u|^4(u+\varepsilon)^{-3} \\
&+ I^{(4)}_{a,\varepsilon,\alpha_k,\beta_k}|x|^{a-2}u^{(p+1)/2} \\
&+ I^{(3)}_{\varepsilon,\alpha_k,\beta_k}|x|^a u^{(p+1)/2} \\
&\times\Big|\frac{\nabla u}{u} + \frac{a\beta_{k+1}((p+1)/2 - \alpha_{k+1}u/(u+\varepsilon))}{2I^{(3)}_{\varepsilon,\alpha_k,\beta_k}}\frac{x}{|x|^2}\Big|^2,
\end{aligned}
$$

ở đó các hệ số $I^{(1)}_{\varepsilon,\alpha_k,\beta_k}$, $I^{(2)}_{\alpha_k}$, $I^{(3)}_{\varepsilon,\alpha_k,\beta_k}$, và $I^{(4)}_{a,\varepsilon,\alpha_k,\beta_k}$ được tính như trong [3, Mệnh đề 3.1]. Với $k = -1$, ta chọn

$$\alpha_{-1} = \beta_{-1} = 0.$$

Khi đó $w_{-1} \leqslant 0$ theo [3, Mệnh đề 2.3]. Tiếp theo, ta chọn α_k với $k \geqslant 0$ sao cho $I^{(2)}_{\alpha_k} = 0$; xem [3, Eq. (4-24)]. Sử dụng $(\alpha_k)_{k\geqslant 0}$ta có thể chọn $(\beta_k)_{k\geqslant 0}$ sao cho $I^{(1)}_{0,\alpha_k,\beta_k} > 0$; xem [3, Eq. (4-25)]. Do đó, với mỗi $k \geqslant 0$, ta có thể lựa chọn ε_k đủ nhỏ sao cho

$$I^{(1)}_{\varepsilon_k,\alpha_k,\beta_k} \geqslant 0.$$

Từ đây, ta áp dụng [3, Mệnh đề 3.1] để có

$$
\begin{aligned}
\Delta w_0 \geqslant &2\alpha_0(u+\varepsilon)^{-1}\nabla u\cdot\nabla w_0 - \alpha_0 w_0(u+\varepsilon)^{-2}|\nabla u|^2 \\
&+ \frac{1}{2}\beta(p+1)|x|^{a/2}u^{(p-1)/2}w_0.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Tiếp theo ta áp dụng Bổ đề 2.1 để có $w_0 \leqslant 0$. Lặp lại quá trình trên, ta suy ra

$$w_k \leqslant 0$$

với mọi $k \geqslant -1$, điều này dẫn đến

$$-\Delta u \geqslant \alpha_k(u+\varepsilon)^{-1}|\nabla u|^2 + \beta_k|x|^{a/2}u^{(p+1)/2},$$

với mọi $k \geqslant -1$. Lấy giới hạn đầu tiên với $k \to \infty$ rồi sau đó $\varepsilon \searrow 0$ ta có bất đẳng thức cần chứng minh. □

Tài liệu tham khảo

[1] Cowan, C. (2013). Liouville theorems for stable Lane-Emden systems with biharmonic problems. *Nonlinearity*, 26(8):2357–2371.

[2] Fazly, M. and Ghoussoub, N. (2014). On the Hénon-Lane-Emden conjecture. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 34(6):2513–2533.

[3] Fazly, M., Wei, J.-c., and Xu, X. (2015). A pointwise inequality for the fourth-order Lane-Emden equation. *Anal. PDE*, 8(7):1541–1563.

[4] Phan, Q. H. (2012). Liouville-type theorems and bounds of solutions of Hardy-Hénon systems. *Adv. Differential Equations*, 17(7-8):605–634.

[5] Souplet, P. (2009). The proof of the Lane-Emden conjecture in four space dimensions. *Adv. Math.*, 221(5):1409–1427.

[6] Wei, J., Xu, X., and Yang, W. (2013). On the classification of stable solutions to biharmonic problems in large dimensions. *Pacific J. Math.*, 263(2):495–512.

[7] Wei, J. and Ye, D. (2013). Liouville theorems for stable solutions of biharmonic problem. *Math. Ann.*, 356(4):1599–1612.